



biblioteca de  
**matematică**



EDITURA PARALELA 45

Redactare: Mugur Butuza  
Culegere computerizată: Andreea Popescu  
Tehnoredactare: Luminița Badea  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**IONESCU, SORANA**

**Construcțiile auxiliare în rezolvarea problemelor de geometrie plană /**

Sorana Ionescu. - Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2019

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2980-7

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2019

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Sorana **IONESCU**



## **construcțiile auxiliare**

# în rezolvarea problemelor de **geometrie plană**



*Ediția a II-a*



**Editura Paralela 45**

## Argument

*Aproape toate problemele de geometrie competitivă necesită, într-un fel sau altul, utilizarea unor construcții auxiliare. Totuși, elevilor nu le este ușor să identifice construcția optimă deoarece, la clasă, nu sunt antrenați să rezolve probleme folosind această metodă.*

*În unele probleme sunt mai multe posibilități de a realiza o construcție auxiliară și, poate, nu ne este clar imediat care este cea mai bună. Adesea nu contează: multe probleme pot fi rezolvate în diferite moduri, utilizând diverse construcții auxiliare. Unele abordări pot fi mai eficiente ca altele. Existența mai multor soluții care conduc la aceeași concluzie este una dintre satisfacțiile rezolvării problemelor de geometrie. Elevii pot învăța la fel de multe din oricare dintre soluțiile diferite propuse pentru aceeași problemă.*

*Când o problemă cere construcție auxiliară, dificultatea ei crește, provocarea constând în a decide în ce mod să completăm figura dată, astfel încât acest lucru să ne ajute, simplificând demonstrația și nu complicând-o. Cele mai frumoase probleme de geometrie nu necesită acumularea unui bagaj exagerat de cunoștințe teoretice, ci utilizarea rezultatelor fundamentale din matematică, dublate însă de capacitatea rezolvitorului de a completa desenul problemei cu puncte, drepte, segmente, poligoane, cercuri. Acest lucru cere multă creativitate, dar rezultatele sunt pe măsură.*

*Cartea are un caracter metodic, propunându-și să inițieze cititorul în utilizarea construcțiilor auxiliare. Parcurgând rândurile acestei lucrări, elevii vor descoperi plăcerea de a găsi construcția auxiliară cea mai potrivită pentru rezolvarea problemelor de acest fel. Anumite probleme de geometrie nu se pot rezolva decât prin metoda construcțiilor auxiliare. Noutatea lucrării constă în abordarea temei alese pornind de la o clasificare a problemelor de acest tip în funcție de construcția auxiliară folosită în demonstrație. Cartea de față conține probleme variate atât ca grad de dificultate, cât și din punct de vedere al tipului de construcție auxiliară folosit.*

*Prima parte conține o privire de ansamblu asupra metodei. Sunt prezentate rezultate cunoscute a căror demonstrație utilizează construcții auxiliare și câteva probleme frumoase însoțite, fiecare, de mai multe soluții. Partea a doua cuprinde probleme propuse, grupate în opt categorii, în funcție de construcția auxiliară utilizată în rezolvarea acestora. Partea a treia conține indicații privind construcția auxiliară aleasă, iar în partea a patra sunt prezentate soluții detaliate ale problemelor propuse.*

*Această clasificare a construcțiilor auxiliare este orientativă, având unele mici neajunsuri. În primul rând, există probleme ale căror demonstrații conțin construcții încadrate în capitole diferite și care conduc la același desen. De exemplu, construcția simetricului unui punct față de mijlocul unui segment este, din acest punct de vedere, echivalentă cu construcția unui paralelogram. În al doilea rând, există probleme care necesită două sau mai multe construcții auxiliare. Pe acestea le-am încadrat în categoria care conține tipul de construcție cel mai complex dintre cele folosite.*

*Cu toate acestea, considerăm că lucrarea de față este foarte utilă pentru dezvoltarea abilității elevilor de a rezolva probleme de geometrie folosind construcții auxiliare. Ideea unei construcții optime nu poate veni decât ca rezultat al unei experiențe bogate în rezolvarea unor astfel de probleme.*

Autoarea

# PARTEA ÎNTÂI

## SCURTĂ PREZENTARE GENERALĂ

### I. Prezentare generală a metodei

Când o problemă de geometrie cere construcție auxiliară, dificultatea ei crește, provocarea constând în a decide în ce mod să completăm figura dată, astfel încât acest lucru să ne ajute, simplificând demonstrația și nu complicând-o. Folosirea construcției auxiliare indică o înțelegere profundă a geometriei. Desenele sunt elemente pentru cercetare, completarea acestora dovedind dobândirea unor abilități creative foarte importante în rezolvarea problemelor de geometrie.

Prezentăm, în continuare, câteva sfaturi utile în rezolvarea problemelor de geometrie în general și în special în rezolvarea problemelor care necesită construcții auxiliare:

- Când nu găsești răspunsul imediat, încearcă să afli ce poți. Se poate să găsești ceva care să te conducă la concluzie. Mai mult, poți afla ceva mai interesant decât cerința problemei.
- Să rezolvi o problemă în două moduri diferite este o cale foarte bună să verifici corectitudinea soluției.
- Câteodată, utilizarea metodei reducerii la absurd este mult mai ușoară și mai eficientă decât demonstrația directă.
- În probleme mai complicate de geometrie marchează laturile congruente și unghiurile congruente pe măsură ce le descoperi, îndeosebi pe cele care nu sunt evidente.
- Când nu ajungi la rezultat întreabă-te ce informație din ipoteză nu ai folosit.
- Încearcă să rezolvi o problemă mai ușoară, înrudită cu problema dată. Selectează o parte a condițiilor din ipoteză, realizează un desen doar cu aceste date și poate obții ceva folositor.
- Adesea este bine să încerci câteva exemple înainte de a demonstra un rezultat general. Aceste exemple pot fi o bună călăuză în a descoperi răspunsul căutat.
- Uneori, parcurgând întâi drumul înapoi de la concluzie spre ipoteză, vei putea descoperi soluția problemei.
- Dacă nu vezi rezolvarea problemei imediat, nu abandona. Este util să faci câteva observații, scrie alături demonstrațiile acestora și, poate, vei reuși să combini aceste rezultate pentru a completa rezolvarea problemei.

- În problemele de geometrie, explorarea acestora cere să realizezi un desen mare și curat, respectând măsura unghiurilor, lungimile laturilor fiind proporționale cu cele din enunț. Când găsești o nouă informație ar trebui să refaci desenul folosind noile date. Acest fapt te ajută foarte mult în rezolvarea problemei.
- Unind puncte care inițial nu au fost unite poate fi extrem de util. Asta nu înseamnă să unim toate punctele din desen. Caută segmente care pot fi de ajutor în demonstrație, cele care unesc puncte importante sau cele care formează unghiuri, triunghiuri, patrulatere despre care poți afla ceva imediat.
- Dacă ai două dintre liniile importante în triunghi (de același tip), ar trebui să folosești proprietatea punctului de intersecție și să construiești a treia linie de tipul respectiv.
- Când te-ai blocat într-o demonstrație, notează măsura unuia dintre unghiuri cu o variabilă și încearcă să afli alte măsuri de unghiuri în funcție de această variabilă. Formează o ecuație pentru a afla variabila.
- În multe probleme de geometrie există informații ascunse vederii. Prolungind segmente care par să se termine brusc (în special în interiorul unui triunghi sau patrulater) poți obține rezultate deosebite.
- Dreptele paralele sunt utile în problemele care implică unghiuri, deci, uneori, vei adăuga noi drepte paralele în desen.
- Spărgând un unghi, un segment, o suprafață în mai multe părți, de multe ori poți afla informații folositoare demonstrației.
- O construcție auxiliară foarte utilizată este perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă. Scopul tău este să construiești triunghiuri dreptunghice sau dreptunghiuri ale căror proprietăți să le exploatezi în demonstrația ta. De asemenea, poți evidenția distanțele de la un punct al bisectoarei unui unghi la laturile unghiului, folosind faptul că acestea sunt egale.
- Unghiurile cu măsurile de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ , chiar și suplementele lor, sunt adesea bune pentru a construi triunghiuri dreptunghice cunoscute. Poți face acest lucru ducând perpendiculare sau prelungind segmente.
- Dacă, într-o problemă, se dă mijlocul unui segment, este util să evidențiezi mijlocul unui alt segment care are cu segmentul dat un capăt comun, obținând astfel o linie mijlocie într-un triunghi, linie ale cărei proprietăți le vei folosi în rezolvarea problemei.
- Tot în cazul de mai sus, poți construi un segment al cărui mijloc coincide cu mijlocul segmentului dat, obținând astfel un paralelogram de proprietățile căruia vei beneficia în demersul tău pentru obținerea rezultatului.
- Dacă ai utilizat cu succes o anumită tactică pentru a obține noi informații, dar nu ai rezolvat încă problema, încearcă să utilizezi aceeași tactică într-o altă situație. Poți obține noi informații utile.

# PARTEA A DOUA

## PROBLEME PROPUSE

### CAPITOLUL I

#### CONSTRUCȚIA UNUI SEGMENT

**I.1.** În pătratul  $ABCD$  de latură 5 cm, se consideră punctele  $E \in (BC)$ ,  $F \in (CD)$ , astfel încât  $m\widehat{EAF} = 45^\circ$ . Dacă aria  $\Delta CEF$  este  $3\text{cm}^2$ , calculați aria  $\Delta AEF$ .

*(O.M. Etapa locală Olt 2013 - cls. VII)*

**I.2.** Se consideră  $\Delta ABC$  cu  $AB = AC$  și  $m\widehat{BAC} = 90^\circ$ . Fie  $D \in (BC)$ , astfel încât  $AD \perp BC$ . Bisectoarea  $\widehat{ABC}$  intersectează dreapta  $AD$  în  $I$ . Demonstrați că  $BA + AI = BC$ .

*(O.M. Etapa națională 2013 - cls. VI)*

**I.3.** Fie pătratul  $ABCD$  și punctele  $E \in (BC)$ ,  $F \in (DC)$ . Dacă  $m\widehat{BAE} = 15^\circ$  și  $m\widehat{DAF} = 30^\circ$ , determinați  $m\widehat{AEF}$ .

*(O.M. Etapa locală Hunedoara 2012 - cls. VII)*

**I.4.** În triunghiul  $ABC$  considerăm punctele  $M, N \in (AB)$ ,  $P, Q \in (BC)$  și  $S, R \in (AC)$ , astfel încât  $AM = CR$ ,  $AN = CS$ ,  $\widehat{MQB} \equiv \widehat{RQC}$  și  $\widehat{NPB} \equiv \widehat{SPC}$ . Arătați că dacă  $MQ + QR = NP + PS$ , atunci triunghiul  $ABC$  este isoscel.

*(O.M. Etapa națională 2014 - cls. VI)*

**I.5.** Se consideră romb  $ABCD$ . Punctul  $I$  este centrul cercului înscris în  $\Delta ABC$ . Dacă  $AB + BI = AC$ , arătați că patrulaterul  $ABCD$  este pătrat.

*(Concursul „José Martí” 2012 - cls. VII)*

**I.6.** Se consideră  $\Delta ABC$  și  $\Delta ADC$ , astfel încât  $B$  și  $D$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $AC$ ,  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$  și  $AB + AD = BC + CD$ . Arătați că  $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ .

*(O.M. Etapa județeană Hunedoara 2011 - cls. VI)*

**I.7.** Se consideră un  $\Delta ABC$  echilateral și punctele  $D$  și  $E$ , astfel încât  $C \in (AD)$ ,  $C \in (BE)$ ,  $BD = DE$ . Demonstrați că  $AD = CE$ .

*(Concursul RMCS 2011 - cls. VII)*

**I.8.** Se consideră  $\Delta ABC$  cu  $m\widehat{BAC} = 80^\circ$  și  $AB = 3 \cdot AC$ . Demonstrați că  $m\widehat{ACB} > 75^\circ$ .

*(O.M. Etapa județeană Giurgiu 2010 - cls. VI)*

**I.9.** Se consideră pătratul  $ABCD$  și  $E \in (CD)$ . Bisectoarele unghiurilor  $\widehat{BAE}$  și  $\widehat{DAE}$  intersectează laturile  $(BC)$  și  $(CD)$  în punctele  $M$  și respectiv  $N$ . Arătați că  $MN \perp AE$ .

*(O.M. Etapa locală Mehedinți 2010 - cls. VII)*

**I.10.** Fie  $\Delta ABC$  isoscel,  $AB = AC$  și punctul  $P$  situat în exteriorul triunghiului, dar în interiorul  $\widehat{BAC}$ . Dacă  $\widehat{APB} \equiv \widehat{APC}$  și  $\widehat{ABP}$ ,  $\widehat{ACP}$  sunt obtuze, demonstrați că  $BP = CP$ .

*(O.M. Etapa locală Brăila 2009 - cls. VII)*

I.11. Pătratul  $ABCD$  are latura de 1 cm. Fie  $P \in (AB)$ ,  $Q \in (AD)$ , astfel încât perimetrul  $\triangle APQ$  să fie 2 cm. Demonstrați că  $m\widehat{PCQ} = 45^\circ$ .

(O.M. Etapa județeană Dâmbovița 2009 - cls. VI)

I.12. Fie  $\triangle ABC$  echilateral și punctul  $D$  situat pe latura  $(AC)$ . Bisectoarea  $\widehat{ABD}$  intersectează paralela prin  $A$  la dreapta  $BC$  în punctul  $E$ . Arătați că  $AE + DC = BD$ .

(Concursul „Alexandru Myller” 2009 - cls. VII)

I.13. Se consideră pătratul  $ABCD$  și punctul  $E$  pe latura  $AB$ . Diagonala  $AC$  taie segmentul  $DE$  în punctul  $P$ . Perpendiculara dusă din punctul  $P$  pe  $DE$  intersectează latura  $BC$  în punctul  $F$ . Demonstrați că  $EF = AE + FC$ .

(O.M. Etapa județeană 2008 - cls. VII)

I.14. Pe laturile pătratului  $ABCD$  se iau punctele  $E \in (BC)$  și  $F \in (DC)$ , astfel încât  $BE + DF = AE$ . Arătați că  $\widehat{DAF} \equiv \widehat{FAE}$ .

(Concursul „Academician Radu Miron” 2008 - cls. VII)

I.15. În  $\triangle ABC$ ,  $AB = 6$  cm,  $BC = 4$  cm și  $m\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Arătați că  $AM = AC$ , dacă  $[AM]$  este mediana  $\triangle ABC$ .

(O.M. Etapa locală Neamț 2007 - cls. VI)

I.16. Triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle MNP$  au perimetrele egale. Dacă  $\widehat{A} \equiv \widehat{M}$  și  $AB = MN$ , demonstrați că  $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ .

(O.M. Etapa locală Timiș 2007 - cls. VI)

I.17. Fie  $\triangle ABC$ , astfel încât  $BC = AB + AD$ , unde  $D$  este piciorul bisectoarei  $\widehat{ABC}$ . Arătați că  $m\widehat{BAC} = 2 \cdot m\widehat{ACB}$ .

(Concursul „Nicolae Coculescu” 2007 - cls. VII)

I.18. Fie patrulaterul  $ABCD$  în care  $m\widehat{A} = m\widehat{B} = 60^\circ$ , iar  $AB = AD + BC$ . Dacă  $O$  este punctul de intersecție a diagonalelor, aflați  $m\widehat{BOC}$ .

(Concursul „Ion Ciolac” 2006 - cls. VI)

I.19. Fie  $\triangle ABC$  oarecare și  $[CM]$  bisectoarea  $\widehat{ACD}$ , unde  $D$  este un punct al semidreptei opuse semidreptei  $[CB]$ . Arătați că  $MA + MB > AC + BC$ .

(O.M. Etapa locală Tulcea 2006 - cls. VII)

I.20. Fie  $\triangle ABC$  echilateral cu  $AB = a$ . Pe dreapta  $AC$  se ia punctul  $D$ , astfel încât  $CD = b$  și  $C \in (AD)$ . Pe dreapta  $AB$  se ia punctul  $E$ , astfel încât  $BE = a + b$  și  $B \in (AE)$ . Arătați că  $\triangle ECD$  este isoscel.

(O.M. Etapa județeană Arad 2005 - cls. VI)

I.21. Fie pătratul  $ABCD$ . Se consideră  $M \in (BC)$ ,  $N \in (CD)$ , astfel încât  $[MA]$  este bisectoarea  $\widehat{MNB}$ . Arătați că  $[NA]$  este bisectoarea  $\widehat{DNM}$  și că  $m\widehat{NAM} = 45^\circ$ .

(O.M. Etapa județeană Galați 2005 - cls. VI)

I.22. Fie dreptunghiul  $ABCD$  și punctele  $E \in (BC)$ ,  $F \in (DC)$ , astfel încât  $\widehat{DAF} \equiv \widehat{FAE}$ . Demonstrați că, dacă  $DF + BE = AE$ , atunci  $ABCD$  pătrat.

(O.M. Etapa locală Satu Mare 2005 - cls. VII)

I.23. Fie  $ABCD$  un paralelogram în care  $m\widehat{BCD} \geq 90^\circ$  și  $BC \geq CD$ . Arătați că, dacă pentru orice punct  $M \in (DA)$  și  $N \in (CB)$ , astfel încât  $CM \perp DN$  rezultă  $CM = DN$ , atunci patrulaterul  $ABCD$  este pătrat.

(Problemă avută în atenția comisiei 2004 - cls. VII)

# CUPRINS

<b>ARGUMENT</b> .....	5
<b>PARTEA ÎNTÂI – SCURTĂ PREZENTARE GENERALĂ</b>	
I. Prezentare generală a metodei .....	7
II. Rezultate importante din geometrie ale căror demonstrații se bazează pe construcții auxiliare.....	9
III. Câteva probleme frumoase de geometrie care se rezolvă prin mai multe metode, în funcție de construcția auxiliară aleasă.....	18
<b>PARTEA A DOUA – PROBLEME PROPUSE</b>	
CAPITOLUL I – Construcția unui segment .....	34
CAPITOLUL II – Construcția unui unghi .....	38
CAPITOLUL III – Construcția unei paralele la o dreaptă dată .....	40
CAPITOLUL IV – Construcția unei perpendiculare pe o dreaptă dată .....	43
CAPITOLUL V – Evidențierea mijlocului unui segment.....	49
CAPITOLUL VI – Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă sau față de un punct.....	56
CAPITOLUL VII – Evidențierea punctului de intersecție a două drepte.....	59
CAPITOLUL VIII – Construcția unui poligon sau a unui cerc.....	64
<b>PARTEA A TREIA – INDICAȚII</b>	
CAPITOLUL I – Construcția unui segment.....	67
CAPITOLUL II – Construcția unui unghi.....	68
CAPITOLUL III – Construcția unei paralele la o dreaptă dată.....	69
CAPITOLUL IV – Construcția unei perpendiculare pe o dreaptă dată .....	70
CAPITOLUL V – Evidențierea mijlocului unui segment .....	72
CAPITOLUL VI – Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă sau față de un punct .....	74
CAPITOLUL VII – Evidențierea punctului de intersecție a două drepte .....	75
CAPITOLUL VIII – Construcția unui poligon sau a unui cerc.....	76
<b>PARTEA A PATRA – SOLUȚII</b>	
CAPITOLUL I – Construcția unui segment.....	78
CAPITOLUL II – Construcția unui unghi.....	106
CAPITOLUL III – Construcția unei paralele la o dreaptă dată .....	118
CAPITOLUL IV – Construcția unei perpendiculare pe o dreaptă dată.....	137
CAPITOLUL V – Evidențierea mijlocului unui segment .....	171
CAPITOLUL VI – Construcția simetricului unui punct față de o dreaptă sau față de un punct .....	210
CAPITOLUL VII – Evidențierea punctului de intersecție a două drepte .....	232
CAPITOLUL VIII – Construcția unui poligon sau a unui cerc.....	256
<b>BIBLIOGRAFIE</b> .....	273