Capitolul 1 Permutări

§1. Noțiunea de permutare, operații, proprietăți

Fie A o mulțime finită cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Natura elementelor mulțimii A nu prezintă interes pentru studiul pe care îl întreprindem în continuare și le vom nota cu 1, 2, ..., i, ..., n, la fel ca pe primele n numere naturale diferite de zero. Așadar $A = \{1, 2,..., n\}$. Vom presupune că între elementele lui A avem relația de ordine naturală:

$$1 < 2 < ...< i < ... < n.$$

Definiție

Dacă $A = \{1, 2,..., n\}$, atunci o aplicație bijectivă $\sigma : A \to A$ se numește **permutare de grad *n***.
Vom nota cu S_n mulțimea tuturor permutărilor de grad n.

O permutare $\sigma \in S_n$ este prezentată, de regulă, cu ajutorul unui tablou cu două linii:

$$(*)\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(i) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

în prima linie fiind trecute, în ordine naturală, numerele 1, 2,..., i,..., n, iar în cea de a doua linie fiind inserate imaginile acestora prin σ, anume $\sigma(1)$, $\sigma(2)$,..., $\sigma(i)$,..., $\sigma(n)$.

Cum σ este aplicație bijectivă, în cea de a doua linie a tabloului (*), fiecare număr natural i, $1 \le i \le n$, apare numai o singură dată.

Exemplu Permutarea $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ este aplicația bijectivă $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ care acționează astfel: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$ și $\sigma(5) = 4$.

A da o permutare $\sigma \in S_n$ revine la a insera în cea de a doua linie a tabloului (*) numerele 1, 2,..., i,..., n într-o anumită ordine. Dacă întâi precizăm valoarea lui $\sigma(1)$, pentru aceasta avem n posibilități. Apoi, îndată ce $\sigma(1)$ a fost fixat, pentru $\sigma(2)$ rămân $n - 1$ posibilități. După ce se alege și $\sigma(2)$, rămân $n - 2$ posibilități pentru $\sigma(3)$ ș.a.m.d. Rezultă că numărul permutărilor de grad n este egal cu $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Dacă în cea de a doua linie a tabloului (*) trecem primele n numere naturale nenule în ordine naturală, se obține permutarea $e \in S_n$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & n \\ 1 & 2 & ... & i & ... & n \end{pmatrix}$, numită *permutarea identică*. Avem $e(i) = i$, oricare ar fi $i \in A = \{1, 2,..., n\}$.

Evident e coincide cu aplicația identică a mulțimii $A = \{1, 2,..., n\}$.

Dacă $\sigma, \pi \in S_n$, atunci *compusa* $\sigma \circ \pi$ a permutării σ cu permutarea π:

$$\sigma \circ \pi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}, (\sigma \circ \pi)(i) = \sigma(\pi(i))$$

este, de asemenea, permutare de grad n deoarece compusa a două aplicații bijective este o aplicație bijectivă. Reprezentarea lui $\sigma \circ \pi$ sub formă de tablou cu două linii este:

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \ldots & \sigma(\pi(i)) & \ldots & \sigma(\pi(n)) \end{pmatrix}.$$

Exemplu Dacă $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \sigma(\pi(3)) & \sigma(\pi(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(4) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De asemenea,

$$\sigma \circ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(e(1)) & \sigma(e(2)) & \sigma(e(3)) & \sigma(e(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix} = \sigma \text{ și}$$

$$e \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ e(\sigma(1)) & e(\sigma(2)) & e(\sigma(3)) & e(\sigma(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ e(3) & e(4) & e(1) & e(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma.$$

Orice permutare $\sigma \in S_n$ este aplicație bijectivă, deci admite inversă, de forma:

$$\sigma^{-1} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

definită prin: $\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow j = \sigma(i)$,

Se observă că σ^{-1} este tot permutare de grad n.

Cum $(\sigma \circ \sigma^{-1})(j) = (\sigma(\sigma^{-1}(j)) = \sigma(i) = j$ și $(\sigma^{-1} \circ \sigma)(i) = (\sigma^{-1}(\sigma(i)) = \sigma^{-1}(j) = i$, avem $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$.

Exemplu Dacă $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, avem $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 3,$ $\sigma(5) = 1$, deci $\sigma^{-1}(4) = 1, \sigma^{-1}(2) = 2, \sigma^{-1}(5) = 3, \sigma^{-1}(3) = 4$ și $\sigma^{-1}(1) = 5$, de unde:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5 \text{ și } \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e.$$

Proprietăți ale operației de compunere a aplicațiilor de mulțimi se regăsesc și pentru operația de compunere a permutărilor. Astfel:

(1) $\forall\ \sigma, \pi, \tau \in S_n$, $(\sigma \circ \pi) \circ \tau = \sigma \circ (\pi \circ \tau)$ (*asociativitate*);

(2) $\forall\ \sigma \in S_n$, $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$ (*e* este *element neutru*);

(3) $\forall\ \sigma \in S_n$, $\exists\ \sigma^{-1} \in S_n$, $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$ (orice permutare are *inversă*).

Definiție

Dacă $\sigma \in S_n$, atunci submulțimea A_σ a mulțimii $A = \{1, 2, ..., n\}$, $A_\sigma \stackrel{def}{=} \{i \in A \mid \sigma(i) \neq i\}$ se numește **suportul** permutării σ.

Evident $A_\sigma = \varnothing \Leftrightarrow \sigma = e$.

Exemplu Dacă $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A_\sigma = \{1, 3, 5, 6\}$.

Definiție

O permutare $\tau \in S_n$, $n \geq 2$, se numește **transpoziție** dacă există i și j în $A = \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, astfel încât $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ și $\tau(k) = k$, $\forall\ k \in A \setminus \{i, j\}$.

Transpoziția $\tau \in S_n$ pentru care $\tau(i) = j$ și $\tau(j) = i$ se notează cu $\tau = (i, j)$ sau $\tau = (j, i)$.

În mulțimea S_n a permutărilor de grad n, $n \geq 2$, există $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ transpoziții.

Suportul unei transpoziții $\tau = (i, j)$ este $A_\tau = \{i, j\}$.

Exemple **1.** Permutările $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in S_3$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3)$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3)$

și $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)$ sunt singurele transpoziții din S_3.

2. Dacă $\tau = (2, 5) \in S_6$, atunci $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Lema 1

Dacă $\tau = (i, j) \in S_n$ este o transpoziție, atunci $\tau \neq e$ și $\tau^2 = e$.

Demonstrație. Cum $i \neq j$ și $\tau(i) = j$, avem $\tau \neq e$. Cum $\tau^2(i) = \tau(\tau(i)) = \tau(j) = i$, $\tau^2(j) = \tau(\tau(j)) = \tau(i) = j$ și $\tau^2(k) = \tau(\tau(k)) = \tau(k) = k$, oricare ar fi $k \neq i, j$, rezultă că: $\tau^2 = e$.

Lema 2

Fie $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, $i \in A_\sigma$ și $j = \sigma(i)$. Au loc următoarele:

1. $j \in A_\sigma$.

2. Dacă $\tau = (i, j)$ și $\pi = \sigma \circ \tau$, atunci $A_\pi \subset A_\sigma$, $A_\pi \neq A_\sigma$.

Demonstrație. 1. Cum $i \in A_\sigma$, avem $i \neq \sigma(i) = j$ și deci, dacă $\sigma(j) = j = \sigma(i)$, rezultă $j = i$. Contradicție. Așadar, $\sigma(j) \neq j$, deci $j \in A_\sigma$.

2. Dacă $\sigma(k) = k$, atunci $k \neq i$ și $k \neq j$, deci $\pi(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(k) = k$. Rezultă că $A_\pi \subseteq A_\sigma$. Avem $j \in A_\sigma$ și cum $\pi(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(i) = j$, rezultă că A_π este inclus strict în A_σ.

Observăm că o transpoziție $\tau = (i, j) \in S_n$ este o permutare a cărei acțiune asupra numerelor

$$1, 2, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n$$

revine la a permuta între ele numerele i și j și a lăsa neschimbate celelalte numere:

$$1, 2, \ldots, j, \ldots, i, \ldots, n.$$

Teorema următoare stabilește că acțiunea unei permutări oarecare $\sigma \in S_n$ asupra numerelor $1, 2, \ldots, n$ revine la a acționa (într-o anumită ordine) asupra acestora cu un număr finit de transpoziții.

Teorema 1

Orice permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, se poate reprezenta ca un produs finit de transpoziții.

Demonstrație. Să notăm cu m_σ numărul elementelor lui A_σ. Inducție după numărul m_σ. Dacă $m_\sigma = 0$, atunci $A_\sigma = \varnothing$ și deci $\sigma = e$. Dacă $\tau = (1, 2)$, avem: $e = \tau \circ \tau$. Dacă $A_\sigma \neq \varnothing$, fie $i \in A_\sigma$, $j = \sigma(i)$, $\tau = (i, j)$ și $\pi = \sigma \circ \tau$. Cum $A_\pi \subset A_\sigma$, avem $m_\pi < m_\sigma$. Conform ipotezei de inducție, există transpozițiile $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r \in S_n$ astfel încât $\sigma \circ \tau = \pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r$.

Înmulțind la dreapta cu τ și ținând cont că $\tau \circ \tau = e$, se obține $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r \circ \tau$.

Observație:

Fie $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, și $i_1 \in A_\sigma$. Șirul $i_1, i_2 = \sigma(i_1), i_3 = \sigma(i_2), \ldots$ are termenii în A_σ care este mulțime finită, deci șirul precedent are termeni care se repetă. Cum σ este o aplicație injectivă, primul termen care se repetă este i_1 și să zicem că a doua apariție a sa este $i_{s+1} = i_1$. Cum $i_1 \in A_\sigma$, avem $\sigma(i_1) \neq i_1$, deci $s \geq 2$.

Fie $\pi = \sigma \circ (i_{s-1}, i_s) \circ (i_{s-2}, i_{s-1}) \circ \ldots \circ (i_2, i_3) \circ (i_1, i_2)$.

Se verifică imediat că: $A_\pi = A_\sigma \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ și $\pi(k) = \sigma(k)$ oricare ar fi $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_s$.

Avem: $\sigma = \pi \circ (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \ldots \circ (i_{s-1}, i_s)$.

Dacă $\pi = e$, egalitatea de mai sus reprezintă o descompunere a lui σ în produs de transpoziții. Dacă $\pi \neq e$, se aplică permutării π tratamentul precedent aplicat lui σ. Se continuă până se obține permutarea e și, în final, vom putea preciza descompunerea lui σ în produs de transpoziții.

Exemplu Fie $\sigma \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $A_\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Luăm $i_1 = 1 \in A_\sigma$.

Rezultă $i_1 = 1$, $i_2 = \sigma(1) = 5$, $i_3 = \sigma(5) = 4$, $i_4 = \sigma(4) = 7$, $i_5 = \sigma(7) = 1$. Dacă definim: $\pi \overset{def}{=} \sigma \circ (4, 7) \circ (5, 4) \circ (1, 5) \quad (*)$,

atunci obținem că $A_\pi = A_\sigma \setminus \{1, 5, 4, 7\} = \{2, 3, 6\}$.

Fie $j_1 = 2$. Rezultă: $j_2 = \pi(2) = \sigma(2) = 6$, $j_3 = \pi(6) = \sigma(6) = 3$, $j_4 = \pi(3) = \sigma(3) = 2$ și deci, dacă: $\theta = \pi \circ (6, 3) \circ (2, 6)$, atunci $A_\theta = A_\pi \setminus \{2, 3, 6\} = \varnothing$.

Așadar $\theta = e$, deci $e = \pi \circ (6, 3) \circ (2, 6)$. Înmulțind la dreapta cu $(2, 6)$ și apoi cu $(6, 3)$, obținem $\pi = (2, 6) \circ (6, 3)$.

Înlocuind în (*) și înmulțind succesiv la dreapta cu $(1, 5)$, $(5, 4)$ și $(4, 7)$, obținem: $\sigma = (2, 6) \circ (6, 3) \circ (1, 5) \circ (5, 4) \circ (4, 7)$.

§2. Inversiuni. Semnul unei permutări

Definiție

Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. Spunem că permutarea σ prezintă o **inversiune** pentru perechea ordonată (i, j), cu $1 \leq i < j \leq n$, dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Notăm cu $Inv(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ. Numărul $\varepsilon(\sigma)$, $\varepsilon(\sigma) \overset{def}{=} (-1)^{Inv(\sigma)} \in \{-1, 1\}$ se numește **semnul** sau **signatura permutării σ**.

Vom spune că permutarea σ este **pară**, respectiv **impară** dacă numărul $Inv(\sigma)$ este par, respectiv impar, ceea ce revine la $\varepsilon(\sigma) = 1$, respectiv $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Să observăm că, pentru i fixat, numărul perechilor (i, j) cu $i < j \leq n$, pentru care σ prezintă inversiunii este egal cu numărul elementelor din linia a doua a tabelului:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

aflate în dreapta lui $\sigma(i)$, mai mici ca $\sigma(i)$.

Exemple **1.** Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

În dreapta lui $\sigma(1) = 3$ există 2 numere mai mici decât 3, în dreapta lui $\sigma(2) = 2$ există 1 număr mai mic decât 2, în dreapta lui $\sigma(3) = 5$ există 2 numere mai mici decât 5, iar în dreapta lui $\sigma(4) = 1$ nu există numere mai mici decât 1. Obținem că: $Inv(\sigma) = 2 + 1 + 2 + 0 = 5$ și $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$, deci σ este permutare impară.

2. Dacă $e \in S_n$, $n \geq 2$, este permutarea identică, atunci $Inv(e) = 0$ și $\varepsilon(e) = (-1)^0 = 1$. Deci, permutarea identică e este pară.

Lema 3

Fie $\sigma, \tau \in S_n$, $n \geq 2$, unde $\tau = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq n$. Are loc relația: $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$.

Altfel spus:

Când compunem o permutare σ cu o transpoziție τ, permutarea σ își schimbă semnul (paritatea).

Demonstrație. Fie $\pi = \sigma \circ \tau$. Avem $\pi(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(j)$, $\pi(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(i)$ și $\pi(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(k)$, oricare ar fi $k \neq i, j$. Așadar:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(j) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Demonstrăm prin inducție după numărul $m = j - i$.

Dacă $m = 1$, atunci: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, de unde rezultă că: $Inv(\pi)=\begin{cases} Inv(\sigma)+1, & \text{dacă } \sigma(i+1)>\sigma(i) \\ Inv(\sigma)-1, & \text{dacă } \sigma(i+1)<\sigma(i) \end{cases}$.

Avem: $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=(-1)^{Inv(\sigma)\pm 1}=-(-1)^{Inv(\sigma)}=-\varepsilon(\sigma)$.

Presupunem că $m > 1$. Folosind definiția compunerii permutărilor, se observă că pentru orice număr $s \neq i, j$, avem: $(i, j) = (i, s) \circ (s, j) \circ (i, s)$, iar în particular:
$\tau = (i, j) = (i, i + m) = (i, i + 1) \circ (i + 1, j) \circ (i, i + 1)$.

Înmulțirea lui σ la dreapta cu τ revine la a înmulți pe σ succesiv cu transpozițiile $(i, i + 1)$, $(i + 1, j)$ și $(i, i + 1)$. Conform cazului $m = 1$ și ipotezei de inducție ($j - (i + 1) < m$) σ își schimbă paritatea de trei ori, de unde rezultă: $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$.

Corolar

Orice transpoziție τ este permutare impară.

Demonstrație. Cum $e = \tau \circ \tau$, avem $1 = \varepsilon(e) = \varepsilon(\tau \circ \tau) = -\varepsilon(\tau)$, de unde rezultă $\varepsilon(\tau) = -1$.

Dacă $n > 1$, notăm cu A_n mulțimea permutărilor pare din S_n și cu B_n mulțimea permutărilor impare. Evident, $S_n = A_n \cup B_n$, $A_n \cap B_n = \varnothing$.

Fie $\tau = (1, 2)$. Dacă $\sigma \in A_n$, $n \geq 2$, atunci din lema 3 rezultă că $\sigma \circ \tau \in B_n$, iar dacă $\pi \in B_n$, atunci $\pi \circ \tau \in A_n$. Putem considera aplicația $f: A_n \to B_n$, $f(\sigma) = \sigma \circ \tau$.

Dacă $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$, atunci $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$ și înmulțind la dreapta cu τ, obținem $\sigma_1 = \sigma_2$. Așadar f este aplicație imjectivă.

Dacă $\pi \in B_n$ și $\sigma = \pi \circ \tau \in A_n$, atunci $f(\sigma) = \sigma \circ \tau = \pi \circ \tau \circ \tau = \pi \circ e = \pi$, deci f este și surjectivă.

Prin urmare, f este aplicație bijectivă. Rezultă că numărul permutărilor pare este același cu numărul permutărilor impare, și anume $n!/2$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze numerele $Inv(\sigma)$ și $\varepsilon(\sigma)$.
b) Să se reprezinte σ ca produs de transpoziții.

Rezolvare:

a) În dreapta lui $\sigma(i)$ din a doua linie a lui σ sunt două numere mai mici ca $\sigma(i)$ când $i = 1$, trei când $i = 2$, două când $i = 3$, zero când $i = 4$, unul când $i = 1$.
Așadar: $Inv(\sigma) = 2 + 3 + 2 + 0 + 1 = 8$ și $\varepsilon(\sigma) = (-1)^8 = 1$.

b) Avem $A_\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luăm $i_1 = 1 \in A_\sigma$.
Avem: $i_1 = 1$, $i_2 = \sigma(1) = 3$, $i_3 = \sigma(3) = 4$, $i_4 = \sigma(4) = 1$.
Așadar, dacă $\pi \overset{def}{=} \sigma\circ(3,4)\circ(1,3)$, atunci: $A_\pi = A_\sigma \setminus \{1, 3, 4\} = \{2, 5, 6\}$.
Fie $j_1 = 2 \in A_\pi$, $j_2 = \pi(2) = \sigma(2) = 5$, $j_3 = \pi(5) = \sigma(5) = 6$, $j_4 = \pi(6) = \sigma(6) = 2$.
Dacă $\theta = \pi \circ (5, 6) \circ (2, 5)$, atunci $A_\theta = A_\pi \setminus \{2, 5, 6\} = \varnothing$, deci $\theta = e$.
Avem $\pi = (2, 5) \circ (5, 6)$ și $\sigma = (2, 5) \circ (5, 6) \circ (1, 3) \circ (3, 4)$.

2. a) Dacă $\sigma \in S_n$ și $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m$ este o descompunere a lui σ în produs de transpoziții, atunci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$.

b) Oricare ar fi $\sigma, \pi \in S_n$, avem $\varepsilon(\sigma \circ \pi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi)$.

c) Produsul a două permutări de aceeași paritate (de parități diferite) este o permutare pară (respectiv impară).

Rezolvare:

a) Dacă $m = 1$, avem $\sigma = \tau_1$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) = -1 = (-1)^1$.

Dacă $m > 1$ și $\varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{m-1}) = (-1)^{m-1}$, atunci

$$\varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m) = -\varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{m-1}) = -(-1)^{m-1} = (-1)^m.$$

b) Fie $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m$ și $\pi = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \ldots \circ \tau_{m'}'$ descompuneri ale lui σ și π în produs de transpoziții. Cum $\sigma \circ \pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_m \circ \tau_1' \circ \tau_2' \circ \ldots \circ \tau_{m'}'$, avem:

$$\varepsilon(\sigma \circ \pi) = (-1)^{m+m'} = (-1)^m(-1)^{m'} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi).$$

c) Rezultă din punctul b).

Exerciții propuse

1. Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculați $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, $(\sigma \circ \pi)^{-1}$, $\pi^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

2. Determinați $x \in S_5$, astfel încât:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Fie $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^{212}$.

b) Avem $\sigma^k = e$ cu $k \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă k este multiplu de 3.

4. Dacă i_1, i_2, i_3 sunt trei numere distincte din $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$, notăm cu (i_1, i_2, i_3) permutarea $\alpha \in S_n$ pentru care $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha(i_2) = i_3$, $\alpha(i_3) = i_1$ și $\alpha(k) = k$, $\forall\, k \neq i_1, i_2, i_3$.

Arătați că:

a) $\alpha^3 = e$;

b) $\sigma \circ (i_1, i_2, i_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \sigma(i_3))$, $\forall\, \sigma \in S_n$.

5. a) Dacă $\sigma, \pi \in S_n$ și $A_\sigma \cap A_\pi = \varnothing$, atunci $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$.
b) Dacă $\pi, \tau \in S_n$, $n \geq 5$, $\pi = (1, 2, 3)$ și $\tau = (4, 5)$, atunci $(\pi \circ \tau)^6 = e$.

6. Fie $\pi \in S_5$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Arătați că $\pi = (1, 3, 5) \circ (2, 4)$.
b) Arătați că $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) \circ (\sigma(2), \sigma(4))$, oricare ar fi $\sigma \in S_5$.
c) Determinați permutările $\sigma \in S_5$ cu proprietatea $\sigma \circ \pi \circ = \pi \circ \sigma$.

7. Descompuneți în produs de transpoziții permutările $\sigma \in S_5$ și $\pi \in S_7$,
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Fie permutările $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Să se determine $Inv(\sigma)$ și $Inv(\pi)$.
b) Determinați $\varepsilon(\sigma)$, $\varepsilon(\pi)$, $\varepsilon(\sigma \circ \sigma)$, $\varepsilon(\pi \circ \pi)$, $\varepsilon(\sigma \circ \pi)$ și $\varepsilon(\pi \circ \sigma)$.

9. Să se determine n astfel încât permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ să fie impară.

10. Fie numerele $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ astfel încât $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ și $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$.
Să se arate că oricare ar fi $\sigma \in S_n$ are loc relația:
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \dots + a_nb_{\sigma(n)}.$$

11. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Arătați că oricare ar fi $\sigma \in S_3$, avem:
$$\left(a_1 + \frac{1}{a_{\sigma(1)}}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_{\sigma(2)}}\right)\left(a_3 + \frac{1}{a_{\sigma(3)}}\right) < \left(\frac{5}{2}\right)^3.$$

12. Fie transpoziția $\tau = (i, j) \in S_n$, $1 \leq i < j \leq n$, și mulțimile: $S' = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$, $S'' = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}$. Să se arate că:
a) $S_n = S' \cup S''$ și $S' \cap S'' = \varnothing$.
b) Dacă $\sigma \in S'$, atunci $\sigma \circ \tau \in S''$.
c) Aplicația $f: S' \to S''$, $f(\sigma) = \sigma \circ \tau$, este bijectivă.